

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, ХНТУСХ,
С. В. ОЛЬШАНСКИЙ, НТУ «ХПИ»

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ УСКОРЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ

Описано рух краплі, яка випаровується, як матеріальної точки, що зменшує масу, нелінійним диференціальним рівнянням зі змінними коефіцієнтами. За допомогою спеціального перетворення при рівнозмінному русі газу знайдено аналітичний розв'язок задачі Коші в функціях Бесселя.

Описано движение испаряющейся капли, как материальной точки убывающей массы, нелинейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. С помощью специального преобразования при равнопеременном движении газа найдено аналитическое решение задачи Коши в функциях Бесселя.

The motion of an evaporating drop, as material point of decreasing mass, nonlinear differential equation with variable factors has been described. By special transformation at equalvariable motion of gas the analytical solution of Cauchy problem using Bessel functions is found.

Состояние вопроса, цель исследования и постановка задачи. В технике встречаются случаи, когда движение газа применяют для разгона (ускорения движения) частиц жидкости и образования распылённых струй. Такие процессы используют в двигателях внутреннего сгорания [1], в ракетной технике и авиации [2], в пожарном деле [3] и других областях. На основе численных методов созданы достаточно сложные модели движения и разработаны программы их компьютерной реализации [4,5]. Однако это не исключает поиска компактных аналитических решений упрощённых задач этого класса, допускающих "прозрачный" анализ влияния основных факторов на процесс движения и выявления характерных его особенностей. Из исследований в этом направлении укажем на работы [6,7], в которых предложены аналитические решения задач в линейной постановке, а также в нелинейной – без учёта испарения капли. Но при движении частицы жидкости в среде с высокой температурой приходится учитывать испарение. Поэтому совершенствование расчётных моделей движения испаряющихся капель относится к актуальным задачам.

Здесь при постановке задачи каплю считаем сферовидным телом, радиус которого $r(t)$ является линейной функцией времени движения t , т.е. берём в виде [6]

$$r(t) = r_0 - \mu t,$$

где $r_0 = r(0)$; γ - параметр, характеризующий интенсивность испарения.

Силу аэродинамического взаимодействия частицы с потоком газа F_a принимаем пропорциональной площади миделевого сечения сферы и квадрату скорости обтекания газом. Согласно этому допущению

$$F_a = k\pi r^2 (v - V(t))^2,$$

где k - постоянный коэффициент пропорциональности; $v = v(t)$ - скорость движения центра капли; $V(t)$ - скорость потока газа.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда

$$V(t) = V + at, \quad (V, a = \text{const}),$$

что соответствует движению газа с постоянным ускорением (или замедлением), а скорость движения центра капли является решением нелинейного дифференциального уравнения

$$\dot{v} - \frac{\beta}{r_0 - r} (v - V - at)^2 = 0, \quad (1)$$

в котором $\beta = \frac{3}{4}k$; точка означает производную по времени t .

Из-за малости массы капли и кратковременности промежутка разгона действием веса капли в уравнении (1) пренебрегаем.

Решение уравнения (1) будем находить при начальном условии

$$v(0) = v_0, \quad (2)$$

соблюдая неравенство $v \leq V + at$.

Построение замкнутых аналитических решений задачи Коши.

Введём вспомогательную функцию $u(t) = v - V - at$. Тогда $\dot{u} = \dot{v} - a$ и вместо (1) получаем

$$\frac{du}{dr} + \frac{\beta}{r} u^2 = \frac{a}{\gamma}. \quad (3)$$

Это уравнение типа Риккати. Согласно (2), начальным условием к нему является

$$u_0 = u(r_0) = v_0 - V. \quad (4)$$

Чтобы избавиться от нелинейности, следуя [7], выразим u через неизвестную функцию $w(r)$ и её производную по формуле

$$u = \frac{\gamma r}{\beta} \frac{dw}{w}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), приходим к линейному уравнению, но более высокого порядка

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{a\beta}{\gamma^2 r} w = 0. \quad (6)$$

Далее, в зависимости от знака a , будем различать три случая.

Первый случай ($a > 0$) соответствует равноускоренному движению газа. Для него решение уравнения (6) имеет вид [7]

$$w(r) = c_1 I_0(\tau) + c_2 K_0(\tau).$$

Здесь $a_1 = \gamma^{-1} \sqrt{a\beta}$; $\tau = 2a_1 \sqrt{r}$, $I_0(\tau)$, $K_0(\tau)$ модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых индексов; c_1, c_2 - произвольные постоянные.

Выполнив дифференцирование цилиндрических функций, в соответствии с (5) и начальным условием (2), находим аналитическое выражение скорости капли

$$v(t) = V + at - \frac{a_1 \sqrt{r}}{\beta_0} \frac{c_3 K_1(\tau) - I_1(\tau)}{c_3 K_0(\tau) + I_0(\tau)}. \quad (7)$$

$$\text{Здесь } c_3 = \frac{a_1 \sqrt{r_0} I_1(\tau_0) + \beta_0 (V - v_0) I_0(\tau_0)}{a_1 \sqrt{r_0} K_1(\tau_0) - \beta_0 (V - v_0) K_0(\tau_0)}; \quad \tau_0 = 2a_1 \sqrt{r_0}; \quad \beta_0 = \beta \gamma^{-1}; \quad I_1(\tau),$$

$K_1(\tau)$ - модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда первого порядка.

Второй случай ($a < 0$) соответствует равнозамедленному движению газа. Решением уравнения (6) является

$$w(r) = c_1 J_0(\delta) + c_2 Y_0(\delta). \quad (8)$$

Здесь $\delta = 2b_1 \sqrt{r}$, $b_1 = \gamma^{-1} \sqrt{-a\beta}$, $J_0(\delta)$, $Y_0(\delta)$ - функции Бесселя и Неймана нулевого индекса.

Используя (8), (5), (2) для скорости движения капли получаем

$$v(t) = V + at - \frac{b_1 \sqrt{r}}{\beta_0} \frac{c_4 Y_1(\delta) + J_1(\delta)}{c_4 Y_0(\delta) + J_0(\delta)}, \quad (9)$$

причём
$$c_4 = \frac{b_1 \sqrt{r_0} J_1(\delta_0) - \beta_0 (V - v_0) J_0(\delta_0)}{\beta_0 (V - v_0) Y_0(\delta_0) - b_1 \sqrt{r_0} Y_1(\delta_0)}, \quad \delta_0 = 2b_1 \sqrt{r_0}, \quad I_1(\delta), \quad Y_1(\delta) -$$

функции Бесселя и Неймана индекса единица.

Третий случай ($a=0$) соответствует равномерному движению газа. Решение задачи Коши выражается в элементарных функциях и имеет вид

$$w(r) = c_1 + c_2 \ln r;$$

$$v(t) = \frac{1}{(\nu_0 - V)^{-1} + \beta_0 \ln \frac{r}{r_0}} + V. \quad (10)$$

Из (10), при $\nu_0 = 0$, следует формула скорости, которая была ранее получена в работе [6].

Таким образом, используя (7), (9), (10) и таблицы функций Бесселя [8,9], можно вычислить скорость капли $v(t)$ в потоке газа при его равнопеременном движении.

Формулы приближённого вычисления пути. На практике, кроме скорости разгона, представляет интерес путь $S(t)$, пролетаемый каплей в газе. Определение его сводится к вычислению интеграла

$$S(t) = \int_0^t v(t) dt, \quad (11)$$

который для решений (7), (9) не удаётся выразить через известные табулированные функции. Исключением является третий случай движения газа, когда $a = 0$. Для него

$$S(t) = Vt - \frac{r_0}{\beta} e^b \left[Ei \left(-b - \ln \left(\frac{r_0}{r_0 - r} \right) \right) - Ei(-b) \right].$$

Здесь $b = \frac{\gamma}{\beta(V - v_0)}$; $Ei(-\eta)$ - интегральная показательная функция, таблицы которой имеются в [8,9] и других изданиях по специальным функциям.

Чтобы получить приближённые формулы определения $S(t)$, когда $a \neq 0$, вычислим предел

$$\nu_\gamma(t) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \nu(t).$$

Используя асимптотику цилиндрических функций большого аргумента [8],

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}},$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

при $\nu = 0; 1$, находим, что

$$v_\gamma = V + at - \frac{r_0 \omega}{\beta} \begin{cases} \frac{c \cdot ch(\omega t) + sh(\omega t)}{ch(\omega t) + c \cdot sh(\omega t)} & \text{при } a > 0, \\ \frac{c \cdot \cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{\cos(\omega t) + c \cdot \sin(\omega t)} & \text{при } a < 0. \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{Здесь } \omega = \sqrt{\frac{|a|\beta}{r_0}}; \quad c = \frac{\beta(V - v_0)}{\omega r_0}.$$

Интеграл от предельного значения скорости $S_\gamma(t) = \int_0^t v_\gamma(t) dt$ сводится к элементарным функциям. Действительно,

$$S_\gamma(t) = Vt + \frac{at^2}{2} - \frac{r_0}{\beta} \begin{cases} \ln[ch(\omega t) + c \cdot sh(\omega t)] & a > 0, \\ \ln[\cos(\omega t) + c \cdot \sin(\omega t)] & \text{при } a < 0. \end{cases} \quad (13)$$

На малом промежутке времени разгона капли невязка $\Delta S(t) = S(t) - S_\gamma(t)$ - небольшая. Её с приемлемой точностью можно найти по формуле Симпсона

$$\Delta S(t) \approx \frac{t}{6} \left[v(t) - v_\gamma(t) + 4v\left(\frac{t}{2}\right) - 4v_\gamma\left(\frac{t}{2}\right) \right]. \quad (14)$$

В итоге вычисление пролетаемого каплей пути сводится к формуле

$$S(t) = S_\gamma(t) + \Delta S(t), \quad (15)$$

где второе слагаемое находится приближённо. Для проведения расчёта, в зависимости от знака a , приходится использовать выражения (7), (9), (12-15).

Численные результаты и их анализ. Сравним величины скорости и перемещения, полученные различными методами. При этом примем следующие исходные данные: $r_0 = 10^{-3}$ м; $\gamma = 2 \cdot 10^{-3}$ с $^{-1}$; $\beta = 4 \cdot 10^{-3}$; $v_0 = 0$; $V = 30$ м/с; $t = 0,12$ с.

Таблица 1

Значения скорости капли при различных ускорениях газа, полученные различными способами

a , м/с 2	30	20	10	0	-10	-20	-30
По фор. (7), (9), (10)	30,838	29,957	29,104	28,282	27,506	26,769	26,100
По формуле (12)	30,511	29,663	28,842	-	27,300	26,593	25,943

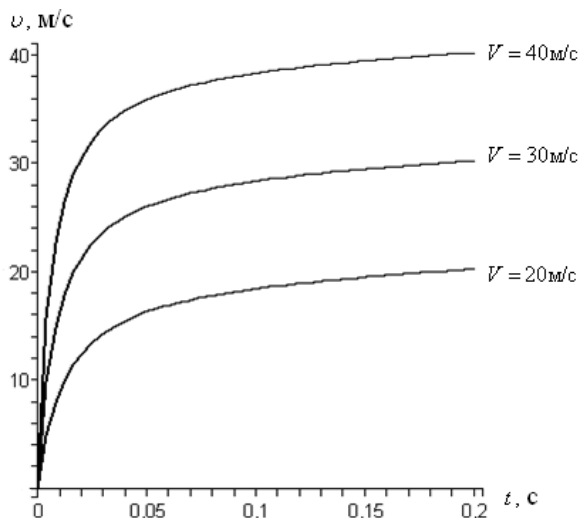
Таблица 2

Значения перемещения капли при различных ускорениях газа, полученные различными способами

a , м/с 2	30	20	10	0	-10	-20	-30
Числ.интег. (11)	3,081	3,031	2,984	2,938	2,892	2,848	2,806
По форм. (15)	3,080	3,031	2,984	2,938	2,891	2,847	2,805

Результаты в табл. 1 и 2 свидетельствуют о высокой точности предложенных формул. Для расчёта скорости наиболее удобна компактная формула (12).

Рассмотрим как влияет скорость потока газа на процесс разгона частицы. Для этого примем $a = 10$ м/с и прежние исходные данные. Результаты расчётов представлены на рисунке. Из него видно, что у кривых существует два характерных участка, на первом частица быстро набирает скорость, а на втором $v(t)$ асимптотически стремится к скорости газа. Из-за малости размеров и массы капли процесс разгона происходит за короткий промежуток времени, что позволяет пренебрегать силой веса капли.



Зависимость $v(t)$ при различных скоростях потока газа

Выводы. Предложенные формулы позволяют вычислять параметры движения испаряющейся капли без численного решения задачи Коши. Высокая точность приближённых аналитических решений подтверждена путём сравнения результатов, к которым они приводят, с результатами численного интегрирования.

Список литературы: 1. *Лышевский А.С.* Распыливание топлива в судовых дизелях. – Л.: Судостроение, 1971. – 248с. 2. *Борисенко А.И., Селиванов В.Г., Фролов С.Д.* Расчёт и экспериментальное исследование газожидкостного сопла при значительном содержании жидкости в газе. Сб. научн. тр.: Вопросы газотермодинамики энергоустановок. Вып. 1. – Харьков: ХАИ, 1974. – С. 83 – 93. 3. *Абрамов Ю.А., Росоха В.Е., Шаповалова Е.А.* Моделирование процессов в пожарных стволах. – Харьков: Фолио, 2001 – 195с. 4. *Стернин Л.Е.* Основы газодинамики двухфазных потоков в соплах. – М.: Машиностроение, 1974. – 211с. 5. *Васильев Ю.Н.* Теория двухфазного газожидкостного эжектора с цилиндрической камерой смешения. В кн.: Лопаточные машины и струйные аппараты. Вып. 5 – М.: Машиностроение, 1971. С. 175 – 261. 6. *Кучеренко С.И., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Тищенко Л.М.* Моделирования польоту крапель, які випаровуються при русі в газі. – Харків: Едена, 2006. – 203с. 7. *Кучеренко С.И., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Тищенко Л.М.* Балістика крапель, які випаровуються при польоті. – Харків: Едена, 2007. – 303с. 8. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям(с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832с. 9. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1977.-344с.

Поступила в редколлегию 06.05.07